10.04.14
Q u 2

Qualitätssicherung (statistische)

betrifft Merkmale, wie Zuverlässigkeit, Funktionalität, Vertrauenswürdigkeit von Schätz- & Testangaben

Lebensdauer

$R(t) := P\{T > t\}$ $(t > 0)$ heißt Zuverlässigkeit

Zuverlässigkeitsrechnung

Erneuerungsfunktion

ZR	Zuverlässigkeitsschaltbild	Berechnung von R	Berechnung von H
SP	Modellierung eines Markov-Prozesses	Erneuerungsprozess	

MP

↳ W - Modelle

3 ② Vertrauenswürdige Schätzer von Parametern (wie z.B. μ) einer Zufallsvariable (z.B. normalverteilt)

1.1 Erwartungswert μ einer μ,σ-normalverteilten Zufallsvariable mit bekanntem σ:

Konfidenzintervall $\left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ zum Niveau α (z.B. 5%)

1.2 Erwartungswert μ bei unbekanntem σ: Stichproben-Varianz $V := \frac{(\bar{X} - X_1)^2 + \ldots + (\bar{X} - X_n)^2}{\underbrace{n-1}_{*}}$

$\overset{*}{\Rightarrow}$ „Erwartungstreue" im Gegensatz zum Nenner n

→ Beobachtungswert v für V: $v := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2$ mit $\bar{x} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

Keine Prüfungsaufgabe zu Quantilen oder Wie Schätze ich $\sqrt{\frac{V}{n}}$ „Varianz" mit Sicherheit

→ Konfidenzintervall $\left[\bar{x} \pm t_{n-1,\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{v}{n}}\right]$ mit den Quantilen der (Student -) t-Verteilung vom Grad $\nu \in \mathbb{N}$ (siehe Tabelle!)

bei unbekannter Varianz

nur ein Schätzwert → nicht σ

1.3 Standardabweichung (bzw. Varianz) einer normalverteilten Zufallsvariable: $\left[\frac{\sqrt{(n-1)v}}{\chi_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{\sqrt{(n-1)v}}{\chi_{n-1,\alpha/2}}\right]$

bzw. $\left[\frac{(n-1)v}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)v}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$ mit den Quantilen $\chi_{\nu,\alpha}$ der Chi-Quadrat-Verteilung vom Grad $\nu \in \mathbb{N}$ s. Tabelle

24.04.2014 • Approximatives Konfidenzintervall für eine (Einzeltreffer-) W-Keit

$p \in]0,1[$ einer Binomialverteilung (mit Parametern n, p): Konfidenzintervall $[p_1, p_2]$ zum Niveau

$\alpha \in]0,1[$ bestimmt durch die quadratische Gleichung in p: $\boxed{\left(n + z^2_{\alpha/2}\right)p^2 - \left(2k + z^2_{\alpha/2}\right)p + \frac{k^2}{n} = 0}$

↳ evtl. Mitternachtsformel

mit k ($\approx np$) als Beobachtungswert der Gesamttrefferanzahl

Prüfung

aus Tabelle ablesen

Zahlenbeispiel: $\alpha = 5\% \Rightarrow z_{\alpha/2} \approx 1{,}96 \Rightarrow z^2_{\alpha/2} \approx 3{,}84$; $n = 100$ Schüsse ; $k := 60$ Treffer

→ Gleichung: $103{,}84p^2 - 123{,}84p + 36 = 0$ → $p_{1/2} \Rightarrow [p_1, p_2] \approx [0{,}50 \, , 0{,}69]$ (50% , 69%)

• Approximatives Konfidenzintervall für eine Zufallsrate λ

λ einer Poisson-Verteilung bei großem Stichprobenumfang n: Konf. intervall $[\lambda_1, \lambda_2]$ zum Niveau $\alpha \in]0,1[$

bestimmt durch die quadratische Gleichung in λ: $\boxed{\lambda^2 - \left(2\hat{\lambda} + \frac{z_{\alpha/2}}{n}\right)\lambda + \hat{\lambda}^2 = 0}$ mit $\hat{\lambda}$ als beobachteter

← geschätzter Wert für λ (was will man haben)

Mittelwert $\hat{\lambda}$ ($\approx \lambda$)

Zahlenbeispiel (siehe Aufgabe 2.3.2): Innerhalb von 24 Monaten werden 103 Ereignisse gezählt. (Annahme: Poisson-Verteil.)

Gesucht: Konf. intervall für die zugehörige Zufallsrate pro Monat. (Lösung: Hier mit $n = 24$ als Stichprobenumfang!) (Do 2.3 182)

② Testen

Ausgang: 1) beobachtete Stichprobe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vom Umfang $n \in \mathbb{N}$
(Gegeben)

2) Hypothese H_0 über einen gewissen, unbekannten Parameter einer zu Grunde liegenden W-Verteilung

3) Fehlerwahrscheinlichkeit α erster Art, dafür dass H_0 irrtümlicherweise abgelehnt wird

Gesucht: 1) Ablehnung oder Annahme von H_0

welchen wahren Wert nehme ich denn an?

2) Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeit β zweiter Art, dafür dass H_0 irrt-weise angenommen / akzeptiert wird in Abhängigkeit des wahren (unbekannten) Parameters.

Stichworte: Gütefunktion / Operationscharakteristik (= 1 - Gütefunktion)

Bsp: Testen des Parameters μ einer Normalverteilung

vorgegebenes μ_0 $\quad$ α = Fehler 1. Art

H_0: $\mu = \mu_0$ (feste geg. Zahl) zum Signifikanzniveau α bei Stichprobenumfang n

Aufgabe: 1) Bestimmung eines kritischen Bereichs $K =]-\infty, \mu_1[\cup]\mu_2, +\infty[$ für Ablehnung von H_0 $(\mu_1 < \mu_0 < \mu_2)$

Lösung: $\mu_1 := \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ und $\mu_2 := \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ => Grenzen für den beobachteten Mittelwert $\bar{x}$

$\bar{x} := \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ -> Aufgabe 1 gelöst

Wahrscheinlichkeit P in Abhängigkeit von μ

2) Bestimmung der Gütefunktion $g(\mu) := P_\mu(\bar{X} \in K)$ mit P_μ als Normalverteilung (bzw. die zugehörige W-Funktion) zum Parameter μ (als Variable bei festem bekannten σ als Standardabweichung)

Lösung: $\boxed{\overset{\text{Gütefunktion}}{g(\mu)} := 2 - \Phi(z_{\alpha/2} - d(\mu)) - \Phi(z_{\alpha/2} + d(\mu))}$ mit $\boxed{d(\mu) := \frac{(\mu - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}}$

Zusammenhang mit $\beta = \beta(\mu)$; $\beta(\mu) = 1 - g(\mu)$

Zahlenbeispiel (für diesen "zweiseitigen Gaußtest" von $H_0: \mu = \mu_0$)

$\bar{x} = 47{,}9$ (als der Flughöhe X) von $n := 30$ Leuchtraketen
und $\sigma = 6$ (m)

zu 95% sicher sein, wenn wir ablehnen

Hersteller sagt $H_0: \mu = 50$ (m) Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha := 5\%$ für die Ablehnung

Aufgabe: 1) Bestimmung von K bzw. vom Annahmebereich $J := \mathbb{R} \setminus K$ $(= [\mu_1, \mu_2])$

$z_{\alpha/2}(5\% = \alpha) = 1{,}96$ => $\mu_1 = 50 - 1{,}96 \frac{6}{\sqrt{30}} \approx 47{,}85$ -> $\mu_1 < \mu_0$ -> (μ_2 irrelevant)

Testergebnis: H_0 wird akzeptiert